Bezirksregierung
Düsseldorf

Mathe-Treff OTW 2025

Lösungen für die Klassenstufe 9/10

AUFGABE 1 (Was man mit Uhren noch machen kann)

Die Schreibweise (1,2,3) beschreibt im Folgenden ein Dreieck mit den Eckpunkten bei der 1, der 2 und der 3. Es wird also bei 1 Uhr begonnen, eine Linie zu 2 Uhr, dann zu 3 Uhr und zum Schluss wieder zu 1 Uhr gezogen.

a) Es werden drei verschiedene Dreiecke gezeichnet. Beispielsweise (1,2,3), (1,2,4) und (1,2,5).
b) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
(12,1,2). (12,2,4), (12,3,6), (12,4,8), (12,5,10)
c) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
Dreiecke:
(12,4,8)
Vierecke:
(12,1,6,7), (12,2,6,8), (12,3,6,9)
d) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
Als Sonderfall „Zweiecke“:
(12,6)

Dreiecke:
(12,4,8)

Vierecke:
(12,1,6,7), (12,2,6,8), (12,3,6,9)

Sechsecke:
(12,1,4,5,8,9), (12,1,2,6,7,8), (12,1,3,6,7,9) (12,1,4,6,7,10), (12,2,4,6,8,10)

Achtecke:
(12,1,3,4,6,7,9,10), (12,1,2,3,6,7,8,9), (12,1,2,4,6,7,8,10)

Neuneck:
(12,1,2,4,5,6,8,9,10)

Zehneck:
(12,1,2,3,4,6,7,8,9,10)

Zwölfeck:
(12,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)
Es gibt also 16 verschiedene drehsymmetrische Figuren.

e)
Die Lösungen sind eindeutig bis auf Drehung. Doppelte Figuren zeigen sich, wenn man die Abstände zwischen benachbarten Zahlen betrachtet. So ist beispielsweise (12,1,3,4,6,7,9,10) = (12,2,3,5,6,8,9,11), da hier zwei benachbarte Zahlen (inklusive der ersten und letzten Zahl jeweils einen Abstand von eins bzw. zwei im Wechsel haben.

Es sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12 die Teiler von 12. Hieraus ergeben sich als mögliche Drehwinkel

30°, 60°, 90°, 120°, 180° und 360°.

Der Drehwinkel 360° liefert keine drehsymmetrische Figur und wird daher ignoriert.

Zum Drehwinkel 30° gehört lediglich **eine Figur**, nämlich das Zwölfeck. Da es nur ein einziges mögliches Zwölfeck gibt, muss es für alle weiteren Überlegungen nicht beachtet werden.

Bei einem Drehwinkel von 180° müssen immer zwei (=360°:180°) Eckpunkte der Figur 12:2 = 6 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einer geraden Anzahl an Eckpunkten möglich.

Sonderfall 2-Eck	4-Eck	6-Eck	8-Eck	10-Eck
(12,6)	(12,1,6,7) (12,2,6,8) (12,3,6,9)	(12,1,2,6,7,8) (12,1,3,6,7,9) (12,1,4,6,7,10) (12,2,4,6,8,10)	(12,1,2,3,6,7,8,9) (12,1,3,4,6,7,9,10) (12,1,2,4,6,7,8,10)	(12,1,2,3,4,6,7,8,9,10)

Es haben also **zwölf Figuren** einen Drehwinkel von 180°.

Bei einem Drehwinkel von 120° müssen immer drei (=360°:120°) Eckpunkte der Figur 12:3=4 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einem Dreieck oder Sechseck möglich.

3-Eck	6-Eck
(12,4,8)	(12,1,4,5,8,9) (12,2,4,6,8,10)

Es haben also **drei Figuren** einen Drehwinkel von 120°.

Bei einem Drehwinkel von 90° müssen immer vier (=360°:90°) Eckpunkte der Figur 12:4=3 Markierungen voneinander entfernt sein. Die ist nur mit einem Viereck oder Achteck möglich.

4-Eck	8-Eck
(12,3,6,9)	(12,1,3,4,6,7,9,10)

Es haben also **zwei Figuren** einen Drehwinkel von 90°.

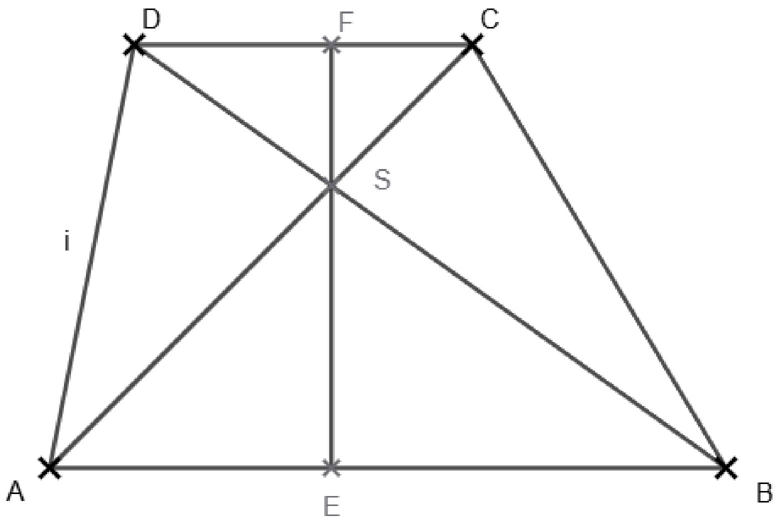
Bei einem Drehwinkel von 60° müssen immer sechs (=360°:60°) Eckpunkte der Figur 12:6=2 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einem Sechseck möglich.

6-Eck
(12,2,4,6,8,10)

Dies liefert also **keine weiteren Figuren**.

Somit existieren insgesamt nur 16 verschiedenen drehsymmetrische Figuren.

AUFGABE 2 (Das Grundstück)



Die Eckpunkte des Trapezes haben die Namen A, B, C und D. Die Strecken zwischen A und B bzw. C und D seien zueinander parallel, diejenige zwischen A und B sei die längere der beiden. Die Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$ schneiden sich in einem Punkt S. Von S aus errichten wir das Lot zur Seite $\overline{AB}$ (dabei entsteht ein Punkt E auf dieser Seite) und zur Seite $\overline{DC}$ (dabei entsteht ein Punkt F auf dieser Seite). Das erste Lot ist zugleich die Höhe des Dreiecks ABS, das zweite Lot ist zugleich die Höhe des Dreiecks DSC. Beide Lote zusammen (die Strecke $\overline{EF}$) ergeben die Höhe des Trapezes.

Die Strecken $\overline{AC}$, $\overline{EF}$, $\overline{BD}$ sowie $\overline{DC}$ und $\overline{AB}$ ergeben eine Figur, in der die Strahlensätze gelten, da $\overline{AB}$ und $\overline{DC}$ parallel zueinander sind.

Es gilt: $\frac{|\overline{SF}|}{|\overline{SE}|} = \frac{|\overline{SC}|}{|\overline{SA}|} = \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{2}$

Daraus folgt anschließend: $|\overline{SF}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{SE}|$ und $|\overline{SF}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{EF}|$ sowie $|\overline{ES}| = \frac{2}{3} \cdot |\overline{EF}|$

Nun gilt für den Flächeninhalt des Dreiecks ABS (das die übrig gebliebene Fläche darstellt):

$$A_D = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{ES}| = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot \frac{2}{3} \cdot |\overline{EF}| = \frac{1}{3} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{EF}|$$

Aber für den Flächeninhalt des Trapezes gilt:

$$A_T = \frac{1}{2} \cdot (|\overline{AB}| + |\overline{CD}|) \cdot |\overline{EF}| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{EF}| = \frac{3}{4} \cdot |\overline{AB}| \cdot |\overline{EF}|$$

Die übrig gebliebene Fläche steht also in einem Verhältnis von $\frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{3} = \frac{4}{9}$ zur ursprünglichen Gesamtfläche. Und das heißt, dass 5/9 bzw. 55,56 % der Fläche verkauft wurden.

AUFGABE 3 (Murmeln)

Die offensichtliche Strategie, mit der Helena einen Sieg erzwingen kann, ist, dass sie zwei Haufen mit jeweils genau vier Murmeln bildet. In diesem Fall muss Helma von einem Haufen so viele Murmeln wegnehmen, dass dieser weniger als vier Murmeln enthält. Dann kann Helena die verbliebenen Murmeln dieses Haufens nehmen.

Im Folgenden wird angenommen, dass Helena zwei Haufen mit jeweils mehr als vier Murmeln bildet. Es kommt nun auf den Rest an, wenn man die Anzahl der Murmeln eines Haufens durch vier teilt. Hierbei sind zwei Fälle zu unterscheiden.

Fall 1: Für beiden Haufen kommt der gleiche Rest heraus.

Fall 2: Beide Haufen haben einen unterschiedlichen Rest.

Fall 1:

Macht nun ein Spieler einen Zug, so kann er nur 1, 2 oder 3 Murmeln nehmen und es liegt Fall 2 vor. Es genügt daher Fall 2 zu betrachten.

Fall 2:

Da beide Haufen mehr als vier Murmeln enthalten, müssen beide Haufen unterschiedlich viele Murmeln enthalten. Der erste Spieler kann nun vom größeren Haufen so viele Murmeln wegnehmen, sodass Fall 1 vorliegt. Wobei beide Haufen mehr als drei Murmeln enthalten.

Der zweite Spieler stellt nun unweigerlich Fall 2 wieder her, woraufhin der erste Spieler wie zuvor beschrieben Fall 1 erzeugt. Beide Haufen haben nach dem Zug des ersten Spielers weiterhin mindestens vier Murmeln.

Dieser Prozess geht so lange weiter, bis der zweite Spieler von einem Haufen Murmeln wegnehmen muss und auf diesen anschließend 1, 2 oder 3 Murmeln liegen. Es gewinnt der erste Spieler.

Somit kann Helena einen Sieg erzwingen, wenn sie zwei Haufen bildet, welche die Bedingung „Fall 1“ erfüllen. Erfüllen beide Haufen die Bedingung „Fall 2“, so kann Helma den Sieg erzwingen.

AUFGABE 4 (Spuren)

Hier sind individuelle, kreative und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht.