Bezirksregierung
Düsseldorf

Mathe-Treff OTW 2025

Lösungen für die gymnasiale Oberstufe

AUFGABE 1 (Was man mit Uhren noch machen kann)

Die Schreibweise (1,2,3) beschreibt im Folgenden ein Dreieck mit den Eckpunkten bei der 1, der 2 und der 3. Es wird also bei 1 Uhr begonnen, eine Linie zu 2 Uhr, dann zu 3 Uhr und zum Schluss wieder zu 1 Uhr gezogen.

a) Es werden drei verschiedene Dreiecke gezeichnet. Beispielsweise (1,2,3), (1,2,4) und (1,2,5).

b) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
(12,1,2). (12,2,4), (12,3,6), (12,4,8), (12,5,10)

c) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
Dreiecke:
(12,4,8)
Vierecke:
(12,1,6,7), (12,2,6,8), (12,3,6,9)

d) Bis auf Drehungen sind alle möglichen Lösungen:
Als Sonderfall „Zweiecke“:
(12,6)

Dreiecke:
(12,4,8)

Vierecke:
(12,1,6,7), (12,2,6,8), (12,3,6,9)

Sechsecke:
(12,1,4,5,8,9), (12,1,2,6,7,8), (12,1,3,6,7,9) (12,1,4,6,7,10), (12,2,4,6,8,10)

Achtecke:
(12,1,3,4,6,7,9,10), (12,1,2,3,6,7,8,9), (12,1,2,4,6,7,8,10)

Neuneck:
(12,1,2,4,5,6,8,9,10)

Zehneck:
(12,1,2,3,4,6,7,8,9,10)

Zwölfeck:
(12,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11)
Es gibt also 16 verschiedene drehsymmetrische Figuren.

e)

Die Lösungen sind eindeutig bis auf Drehung. Doppelte Figuren zeigen sich, wenn man die Abstände zwischen benachbarten Zahlen betrachtet. So ist beispielsweise (12,1,3,4,6,7,9,10) = (12,2,3,5,6,8,9,11), da hier zwei benachbarte Zahlen (inklusive der ersten und letzten Zahl jeweils einen Abstand von eins bzw. zwei im Wechsel haben.

Es sind 1, 2, 3, 4, 6 und 12 die Teiler von 12. Hieraus ergeben sich als mögliche Drehwinkel

30°, 60°, 90°, 120°, 180° und 360°.

Der Drehwinkel 360° liefert keine drehsymmetrische Figur und wird daher ignoriert.

Zum Drehwinkel 30° gehört lediglich **eine Figur**, nämlich das Zwölfeck. Da es nur ein einziges mögliches Zwölfeck gibt, muss es für alle weiteren Überlegungen nicht beachtet werden.

Bei einem Drehwinkel von 180° müssen immer zwei (=360°:180°) Eckpunkte der Figur 12:2 = 6 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einer geraden Anzahl an Eckpunkten möglich.

Sonderfall 2-Eck	4-Eck	6-Eck	8-Eck	10-Eck
(12,6)	(12,1,6,7) (12,2,6,8) (12,3,6,9)	(12,1,2,6,7,8) (12,1,3,6,7,9) (12,1,4,6,7,10) (12,2,4,6,8,10)	(12,1,2,3,6,7,8,9) (12,1,3,4,6,7,9,10) (12,1,2,4,6,7,8,10)	(12,1,2,3,4,6,7,8,9,10)

Es haben also **zwölf Figuren** einen Drehwinkel von 180°.

Bei einem Drehwinkel von 120° müssen immer drei (=360°:120°) Eckpunkte der Figur 12:3=4 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einem Dreieck oder Sechseck möglich.

3-Eck	6-Eck
(12,4,8)	(12,1,4,5,8,9) (12,2,4,6,8,10)

Es haben also **drei Figuren** einen Drehwinkel von 120°.

Bei einem Drehwinkel von 90° müssen immer vier (=360°:90°) Eckpunkte der Figur 12:4=3 Markierungen voneinander entfernt sein. Die ist nur mit einem Viereck oder Achteck möglich.

4-Eck	8-Eck
(12,3,6,9)	(12,1,3,4,6,7,9,10)

Es haben also **zwei Figuren** einen Drehwinkel von 90°.

Bei einem Drehwinkel von 60° müssen immer sechs (=360°:60°) Eckpunkte der Figur 12:6=2 Markierungen voneinander entfernt sein. Dies ist nur mit einem Sechseck möglich.

6-Eck
(12,2,4,6,8,10)

Dies liefert also **keine weiteren Figuren**.

Somit existieren insgesamt nur 16 verschiedenen drehsymmetrische Figuren.

f)
Die Lösungen sind eindeutig bis auf Drehung. Doppelte Figuren zeigen sich, wenn man die Abstände zwischen benachbarten Zahlen betrachtet. So ist beispielsweise (12,1,3,4,6,7,9,10) = (12,2,3,5,6,8,9,11), da hier zwei benachbarte Zahlen (inklusive der ersten und letzten Zahl jeweils einen Abstand von eins bzw. zwei im Wechsel haben.

Es sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 und 60 die Teiler von 60. Dies beschreibt die Anzahl der Ecken der drehsymmetrischen Polygone, die eingezeichnet werden können. Weiterhin ergeben sich aus den Teilern die möglichen Drehwinkel, nämlich 6°, 12°, 18°, 24°, 30°, 36°, 60°, 72°, 90°, 120°, 180° und 360°.

Zwei aufeinander folgenden Minutenmarkierungen auf der Uhr bilden stets einen Winkel von 6°. Dies ermöglicht aufgrund der geforderten Drehsymmetrie zu jedem Drehwinkel einen sich wiederholenden Abschnitt zu definieren und das Problem auf diesen Abschnitt zu reduzieren. Die verfügbaren Eckpunkte des Polygons werden gleichmäßig auf die Anzahl der Abschnitte verteilt. Zum Beispiel liefert zum Drehwinkel 60° einen Abschnittslänge n=10 [Minuten], denn 60°:6°=10. Da eine volle Stunde 60 Minuten hat, gibt es insgesamt 6 dieser Abschnitte. Wird ein 12 Eck betrachtet, so müssen in jedem dieser Abschnitte genau k=2 Eckpunkte liegen und sie müssen aufgrund der Drehsymmetrie in jedem Abschnitt genau an derselben Position liegen.

Es geht also um die Frage danach, wie viele Kombinationen es für k=2 Eckpunkte auf n=10 Positionen gibt, wobei die Reihenfolge der Eckpunkte egal ist.

Dies entspricht dem Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$.

Die nachfolgende Tabelle listet alle Kombinationen von möglichen Polygonen (anhand ihrer Eckpunkte) und Drehwinkel auf. Denn beispielsweise können die Eckpunkte eines 20-Eck nicht so angeordnet werden, dass ein Drehwinkel von 60° vorliegt. Um die möglichen Drehwinkel zu einem n-Eck zu ermitteln, müssen alle Teiler von n betrachtet werden. Ist beispielsweise 3 ein Teiler von n, so lässt sich das n-Eck so anordnen, dass ein Drehwinkel von 120° (360°:3=120°) vorliegt.

Der Drehwinkel 360° liefert keine drehsymmetrische Figur und wird daher ignoriert.

Zum Drehwinkel 6° gehört lediglich **eine Figur**, nämlich das Sechzigeck. Da es nur ein einziges mögliches

Sechzigeck gibt, muss es für alle weiteren Überlegungen nicht beachtet werden.

Ecken	Teiler	Mögliche Drehwinkel
60	1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60	6°, 12°, 18°, 24°, 30°, 36°, 60°, 72°, 90°, 120°, 180°, 360°
30	1,2,3,5,6,10,15,30	12°, 24°, 36°, 60°, 72°, 120°, 180°, 360°
20	1,2,4,5,10,20	18°, 36°, 72°, 90°, 180°, 360°
15	1,3,5,15	24°, 72°, 120°, 360°
12	1,2,3,4,6,12	30°, 60°, 90°, 120°, 180°, 360°
10	1,2,5,10	36°, 72°, 180°, 360°
6	1,2,3,6	60°, 120°, 180°, 360°
5	1,5	72°, 360°
4	1,2,4	90°, 180°, 360°
3	1,3	120°, 360°
2	1,2	180°, 360°
1	1	360°

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
6°	60	1	60	1	1
12°	30	2	30	1	2
18°	20	3	20	1	3
24°	15	4	30	2	6
24°	15	4	15	1	4
30°	12	5	12	1	5
36°	10	6	20	2	15
36°	10	6	10	1	6
60°	6	10	30	5	252
60°	6	10	12	2	45
60°	6	10	6	1	10
72°	5	12	30	6	924
72°	5	12	20	4	495
72°	5	12	15	3	220
72°	5	12	10	2	66
72°	5	12	5	1	12
90°	4	15	20	5	3003
90°	4	15	12	3	455
90°	4	15	4	1	15
120°	3	20	30	10	184756
120°	3	20	15	5	15504
120°	3	20	6	2	190
120°	3	20	3	1	20
180°	2	30	30	15	155117520
180°	2	30	20	10	30045015
180°	2	30	10	5	142506
180°	2	30	6	3	4060
180°	2	30	4	2	435
180°	2	30	2	1	30

Nun müssen noch die Fälle herausgefiltert werden, die mehrfach berücksichtigt wurden.

Ist eine Figur drehsymmetrisch mit dem Drehwinkel α, so ist dieselbe Figur auch drehsymmetrisch mit dem Drehwinkel n·α, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Da das obige Verfahren zu einem Drehwinkel alle möglichen drehsymmetrischen Polygone liefert, können wir alle Fälle aussortieren, bei denen zu derselben Anzahl an Eckpunkten ein Drehwinkel vorliegt, der durch Division mit einer natürlichen Zahl entsteht.

Es kann dabei auch vorkommen, dass Polygone nicht nur doppelt, sondern häufiger vorkommen. Zur Übersicht werden die einzelnen Polygone in separaten Tabellen betrachtet.

30-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
12°	30	2	30	1	2
24°	15	4	30	2	6
60°	6	10	30	5	252
72°	5	12	30	6	924
120°	3	20	30	10	184756
180°	2	30	30	15	155117520

Es gibt insgesamt 2+(6-2)+(252-2)+(924-2-6)+(184756-2-6-252)+(155117520-252-2)=155.302.934 verschiedene drehsymmetrische 30-Ecke.

20-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
18°	20	3	20	1	3
36°	10	6	20	2	15
72°	5	12	20	4	495
90°	4	15	20	5	3003
180°	2	30	20	10	30045015

Es gibt insgesamt 3+(15-3)+(495-3-15)+(3003-3)+(30045015-3-15-3003)=30.048.489 verschiedene drehsymmetrische 20-Ecke.

15-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
24°	15	4	15	1	4
72°	5	12	15	3	220
120°	3	20	15	5	15504

Es gibt insgesamt 4+(220-4)+(15504-4)=15.720 verschiedene drehsymmetrische 15-Ecke.

12-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
30°	12	5	12	1	5
60°	6	10	12	2	45
90°	4	15	12	3	455

Es gibt insgesamt 5+(45-5)+(455-5)=495 verschiedene drehsymmetrische 12-Ecke.

10-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
36°	10	6	10	1	6
72°	5	12	10	2	66
180°	2	30	10	5	142506

Es gibt insgesamt 6+(66-6)+(142506-6)=142.566 verschiedene drehsymmetrische 10-Ecke.

6-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
60°	6	10	6	1	10
120°	3	20	6	2	190
180°	2	30	6	3	4060

Es gibt insgesamt 10+(190-10)+(4060-10)=4.240 verschiedene drehsymmetrische 6-Ecke.

5-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
72°	5	12	5	1	12

Es gibt insgesamt 12 verschiedene drehsymmetrische 5-Ecke.

4-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
90°	4	15	4	1	15
180°	2	30	4	2	435

Es gibt insgesamt 15+(435-15)=435 verschiedene drehsymmetrische 4-Ecke.

3-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
120°	3	20	3	1	20

Es gibt insgesamt 20 verschiedene drehsymmetrische 3-Ecke.

Sonderfall 2-Eck:

Drehwinkel	Anzahl der Abschnitte	Länge n des Abschnitts	Eckpunkte des Polygons	Anzahl k der Eckpunkte pro Abschnitt	Anzahl der Kombinationen (n über k)
180°	2	30	2	1	30

Es gibt insgesamt 30 verschiedene drehsymmetrische 2-Ecke.

Somit ist die Gesamtanzahl der möglichen drehsymmetrischen Polygone (mit dem Sonderfall des 2-Ecks):

30+20+435+12+4.240+142.566+495+15.720+ 30.048.489+ 155.302.934+1=**185.514.941**

AUFGABE 2 (Generierte Bilder)

Es müssen zwei Fälle unterschieden werden.

Fall 1: n ist gerade

In diesem Fall gibt es eine natürliche Zahl k mit n=2k.

Für den Spielstein in der ersten Spalte gibt es 2k Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welches Feld in der 2k. Spalte ein Spielstein gesetzt werden muss. Insgesamt sind damit schon zwei Spalten und zwei Zeilen belegt.

Für die Wahl des Feldes in der 2. Spalte bleiben damit nur noch (2k-2) Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der (2k-1). Spalte fest und es wurden insgesamt zwei weitere Zeilen belegt.

Für die Wahl des Felds in der 3. Spalte bleiben damit nur noch (2k-4) Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der (2k-2). Spalte fest und zwei weitere Zeilen wurden belegt.

Dieses Prinzip wird so lange fortgeführt, bis man bei der k+1. Spalte angekommen ist. Für die Wahl des Felds in der k+1. Spalte bleiben damit nur noch 2 Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der 2k. Spalte fest und die beiden letzten Zeilen wurden belegt.

Insgesamt erhält man damit (2k · (2k-2) · (2k-4) · … · 4 · 2) = (n · (n-2) · (n-4) · … · 4 · 2) Muster.

Jedoch sind nicht alle diese Muster verschieden, da sie es zu jedem Muster M ein Muster M' gibt, welches durch eine Drehung um 90° aus M entsteht.

Nun gibt es theoretisch Fälle bei denen das Muster drehsymmetrisch um 90° ist, also M=M' gilt. Dies ist jedoch nur möglich, wenn n durch vier teilbar ist, da aufgrund dieser Drehsymmetrie zu jedem belegten Feld genau drei weitere Felder belegt sein müssen.

Anmerkung: Es ist nicht möglich, dass bei einem solchen 90° drehsymmetrischen Muster die Felder in den Ecken belegt sind.

Diese Überlegung führt somit zu weiteren Fallunterscheidungen.

Fall 1.a:

n ist durch vier teilbar

Dann gibt es ein m mit $n=4m$.

Für den ersten Spielstein gibt es $(n-2)$ Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welche Felder drei weitere Spielsteine gesetzt werden müssen. Insgesamt sind damit schon vier Spalten und vier Zeilen belegt.

Für den fünften Spielstein gibt es $(n-6)$ Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welche Felder drei weitere Spielsteine gesetzt werden müssen. Insgesamt sind damit schon $2 \cdot 4$ Spalten und $2 \cdot 4$ Zeilen belegt.

Für den neunten Spielstein gibt es $(n-10)$ Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welche Felder drei weitere Spielsteine gesetzt werden müssen. Insgesamt sind damit schon $3 \cdot 4$ Spalten und $3 \cdot 4$ Zeilen belegt.

Dies führen wir fort bis zum $(n-3)$. Spielstein. Für diesen gibt es noch 2 Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welche Felder drei weitere Spielsteine gesetzt werden müssen. Insgesamt sind damit schon $m \cdot 4 = n$ Spalten und $m \cdot 4 = n$ Zeilen belegt.

Insgesamt gibt es also $(n-2) \cdot (n-6) \cdot (n-10) \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2$ verschiedenen Muster, die um 90° drehsymmetrisch sind.

Alle übrigen Muster sind um 180° drehsymmetrisch.

Die Gesamtzahl der Muster beläuft sich somit auf:

$[(n-2) \cdot (n-6) \cdot (n-10) \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2] : 4$

$+ [(n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2) - ((n-2) \cdot (n-6) \cdot (n-10) \cdot \ldots \cdot 10 \cdot 6 \cdot 2)] : 2$

Fall 1.b:

n ist nicht durch vier teilbar.

In diesem Fall kann es keine um 90° drehsymmetrischen Muster geben. Somit ist die Gesamtzahl der Muster:

$(n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 2) : 2$

Fall 2:

n ist ungerade

In diesem Fall gibt es eine natürliche Zahl k mit $n = 2k - 1$.

Für den Spielstein in der ersten Spalte gibt es $2k - 1$ Möglichkeiten. Mit diesem ersten Spielstein liegt wegen der Punktsymmetrie auch fest, auf welches Feld in der $(2k -1)$. Spalte ein Spielstein gesetzt werden muss. Insgesamt sind damit schon zwei Spalten und zwei Zeilen belegt.

Für die Wahl des Feldes in der 2. Spalte bleiben damit nur noch (2k - 3) Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der (2k-2). Spalte fest und es wurden insgesamt zwei weitere Zeilen belegt.

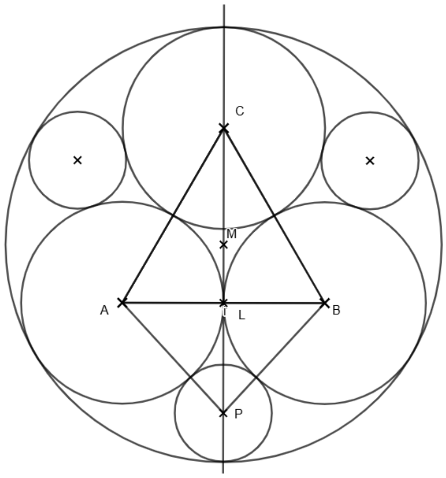
Für die Wahl des Felds in der 3. Spalte bleiben damit nur noch (2k - 5) Möglichkeiten. Mit seiner Wahl liegt auch das Feld in der (2k-3). Spalte fest und zwei weitere Zeilen wurden belegt.

Dieses Prinzip wird so lange fortgeführt, bis man bei der k. Spalte angekommen ist. Für die Wahl des Felds in der k. Spalte bleiben damit nur noch eine einzige Möglichkeit. Insbesondere muss dies immer das Feld in der Mitte des Spielfeldes sein.

Insgesamt erhält man damit ((2k - 1) · (2k - 3) · (2k - 5) · … · 3 · 1) = (n · (n-2) · (n-4) · … · 3 · 1) Muster.

Aufgrund derselben Überlegungen, wie in Fall 1.b, muss diese Anzahl am Ende durch 2 geteilt werden und man erhält insgesamt (n · (n-2) · (n-4) · … · 3 · 1) : 2 Muster.

AUFGABE 3 (Alles Blech)



Wir bezeichnen den Mittelpunkt des ganz großen Kreises als M und die Mittelpunkte der drei mittelgroßen Kreise als A, B und C. Der Radius des ganz großen Kreises sei R, der Radius der mittelgroßen Kreise ist 5 cm, der Radius der kleinen Kreise r.

Das Dreieck ABC muss ein gleichseitiges Dreieck sein mit einer Seitenlänge von 10 cm. Jeweils zwei mittelgroße Radien (zu je 5 cm) ergänzen sich zu einer Seite des Dreiecks. Die Radien der mittelgroßen Kreise sind identisch und sie stehen jeweils senkrecht zu einer Tangente an die Kreislinie.

Der Punkt M wiederum ist gleich weit entfernt von den Punkten A, B und C aufgrund der Symmetrie. Damit ist M aber zugleich der Schwerpunkt des Dreiecks ABC (und sein Um- und Inkreismittelpunkt). Die Seitenhalbierenden dieses Dreiecks sind zugleich seine Höhen. Daher ist das Lot von Punkt C zur Strecke zwischen A und B (mit L als Lotfußpunkt) zugleich eine Seitenhalbierende. Die Länge dieser Seitenhalbierenden s lässt sich mit Hilfe des Satzes von Pythagoras bestimmen, da ALC ein rechtwinkliges Dreieck ist.

Es gilt: $s^2 + 5^2 = (5+5)^2$, also $s^2 = 100 - 25 = 75$. Damit können wir festhalten: $s = \sqrt{75}$ cm.

Die Seitenhalbierenden wird vom Schwerpunkt M aber im Verhältnis 1:2 geteilt. Damit ergibt sich als nächstes, dass $|\overline{MC}| = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{75}$.

Mit dieser Information können wir den Radius des großen Kreises bestimmen. Dieser besteht nämlich aus der Strecke zwischen M und C und dem Radius 5 cm (für die Strecke von C bis zum Rand des großen Kreises). Wir erhalten als Endergebnis für den großen Kreis:

$$R = |\overline{MC}| + 5 = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{75} + 5 \approx 10{,}77\text{cm}$$

Nun bestimmen wir noch den Radius r der kleinen Kreise:

Die mittelgroßen Kreise um A und B berühren sich im Punkt L. Der Mittelpunkt des diese mittelgroßen Kreise berührenden kleinen Kreises sei P.

Der große Radius R lässt sich dann beschreiben mit dem Term $R = |\overline{ML}| + |\overline{LP}| + r$.

Da M der Schwerpunkt des Dreiecks ABC ist (siehe oben) lässt sich $|\overline{ML}|$ ersetzen durch $\frac{1}{3} \cdot \sqrt{75}$.

Die Strecke $|\overline{LP}|$ wiederum lässt sich mit dem Satz des Pythagoras beschreiben, da das Dreieck ALP rechtwinklig ist. Dabei kann die Strecke zwischen A und P beschrieben werden mit dem Ausdruck 5+r. Damit ergibt sich: $|\overline{AL}^2| + |\overline{LP}^2| = |\overline{AP}^2|$ bzw.

$5^2 + |\overline{LP}^2| = (5 + r)^2$ oder $|\overline{LP}^2| = (5 + r)^2 - 5^2 = 25 + 10r + r^2 - 25 = 10r + r^2$ und damit $|\overline{LP}| = \sqrt{(10r + r^2)}$

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\frac{2}{3} \cdot \sqrt{75} + 5 = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{75} + \sqrt{(10r + r^2)} + r$$

Diese Gleichung wird nun nach r aufgelöst:

$$\begin{aligned}
\frac{2}{3} \cdot \sqrt{75} + 5 &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{75} + \sqrt{(10r + r^2)} + r \\
\frac{1}{3} \cdot \sqrt{75} + 5 - r &= \sqrt{(10r + r^2)} \\
\left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{75} + 5\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot \sqrt{75} + 5\right) \cdot r + r^2 &= 10r + r^2 \\
\frac{75}{9} + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{75} + 25 - \frac{2}{3} r\sqrt{75} - 10r + r^2 &= 10r + r^2 \\
\frac{300}{9} + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{75} - \frac{2}{3} r\sqrt{75} &= 20r \\
\frac{300}{9} + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{75} &= 20r + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{75} r \\
\frac{300}{9} + \frac{10}{3} \cdot \sqrt{75} &= \left(20 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{75}\right) r \\
r &= \frac{300 + \frac{10}{3}\sqrt{75}}{20 + \frac{2}{3}\sqrt{75}} \approx 2{,}41\text{cm}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $R \approx 10{,}77\mathrm{cm}$ und $r \approx 2{,}41\mathrm{cm}$.

AUFGABE 4 (Spuren)

Hier sind individuelle, kreative und vielfältige Aufgaben zum Thema mit den zugehörigen Lösungen gefragt.

Eine Musterlösung existiert nicht.